

1 Potentiel électrostatique

🎯 **Objectif** : appliquer le formalisme des fonctions de Green scalaires à l'étude du potentiel électrostatique.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

Le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est localement lié au potentiel électrostatique $\phi(\mathbf{r})$ et au potentiel magnétostatique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ par la relation suivante,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial t}.$$

On se place en jauge de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

- (a) Montrer que le potentiel scalaire électrostatique satisfait l'équation de Poisson électrostatique,

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide et $\rho(\mathbf{r})$ est la densité de charge électrostatique.

- (b) Déterminer le potentiel électrostatique $\phi(\mathbf{r})$ généré en position \mathbf{r} par une distribution de charge électrique de densité $\rho(\mathbf{r}')$ en tout point \mathbf{r}' dans un volume V . Pour ce faire, identifier premièrement la fonction de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ définie par l'équation de Green scalaire,

$$-\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

pour une charge électrique ponctuelle Q unique située en position \mathbf{r}' et déterminer la transformation de jauge qui la laisse invariante. En déduire deuxièmement le potentiel électrostatique $\phi(\mathbf{r})$ par superposition.

2 Potentiel gravitationnel

🎯 **Objectif** : appliquer le formalisme des fonctions de Green scalaires à l'étude du potentiel gravitationnel.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆ facultatif.

Le champ gravitationnel $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ est localement lié au potentiel gravitationnel $\varphi(\mathbf{r})$, qui est l'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse, par la relation suivante,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) .$$

Par analogie avec l'électrostatique, l'équation de Gauss gravitationnelle s'écrit,

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r}) ,$$

où la différence de signe est due au fait qu'au voisinage d'une masse le champ gravitationnel converge alors qu'au voisinage d'une charge électrique positive le champ électrique diverge.

- (a) Montrer que le potentiel gravitationnel satisfait l'équation de Poisson gravitationnelle,

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}) ,$$

où G est la constante de la gravitation universelle et $\rho(\mathbf{r})$ est la densité de masse (masse volumique).

- (b) Déterminer le potentiel gravitationnel $\varphi(\mathbf{r})$ généré en position \mathbf{r} par une distribution de masse de densité $\rho(\mathbf{r}')$ en tout point \mathbf{r}' dans un volume V . Pour ce faire, identifier premièrement la fonction de Green $\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ définie par l'équation de Green scalaire,

$$\nabla^2 \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ,$$

pour une masse ponctuelle M unique située en position \mathbf{r}' et déterminer la transformation de jauge qui la laisse invariante. En déduire deuxièmement le potentiel gravitationnel $\varphi(\mathbf{r})$ par superposition.

3 Fonctions de Green tensorielles

🎯 **Objectif** : établir le formalisme de Green pour des fonctions de Green tensorielles.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆ facultatif.

On considère une équation différentielle linéaire vectorielle de la forme suivante,

$$\mathcal{L} \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) .$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel linéaire, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ sont deux fonctions vectorielles. L'équation de Green tensorielle s'écrit,

$$\mathcal{L} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{1} ,$$

où la fonction de Green tensorielle $\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et le tenseur identité $\hat{1}$, qui sont des applications linéaires, sont représentés dans une base orthonormée par les matrices suivantes,

$$\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- (a) Montrer que la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, qui est solution de cette équation, est le produit de convolution entre la fonction de Green tensorielle $\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ et la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = (\mathbf{G} * \mathbf{f})(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{f}(\mathbf{r}') d^3r' .$$

4 Potentiel magnétostatique

🎯 **Objectif** : appliquer le formalisme des fonctions de Green tensorielles à l'étude du potentiel magnétostatique.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

📌 **Difficulté** : ☆☆☆ obligatoire.

Le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est localement lié au potentiel magnétostatique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ par la relation suivante,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) .$$

On se place en jauge de Coulomb,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

- (a) Montrer que le potentiel vecteur magnétostatique satisfait l'équation de Poisson magnétostatique,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}),$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ est la densité de courant magnétostatique compte tenu de l'identité vectorielle,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

- (b) Déterminer le potentiel vecteur magnétostatique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ généré en position \mathbf{r} par une distribution de courants électriques de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ en tout point \mathbf{r}' dans un volume V . Pour ce faire, identifier premièrement la fonction de Green $\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ définie par l'équation de Green tensorielle,

$$-\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{1},$$

pour un courant électrique \mathbf{I} unique situé en position \mathbf{r}' , où $\mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est la fonction de Green tensorielle et $\hat{1}$ est le tenseur identité. Déterminer la transformation de jauge qui laisse l'équation de Green invariante. En déduire deuxièmement le potentiel vecteur magnétostatique $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ par superposition.

5 Equation de la chaleur

🎯 **Objectif** : appliquer le formalisme des fonctions de Green à l'étude de la diffusion de la chaleur dans une barre.

📖 **Théorie** : analyse.

🔧 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

On considère une barre infiniment longue orientée le long de l'axe des abscisses. Elle est soumise à une source de chaleur $\sigma(x', t')$ au point x' au temps $t' < t$. La diffusion de la chaleur est décrite par l'équation de la chaleur qui détermine l'évolution spatio-temporelle du profil du champ de température $T(x, t)$ dans la barre,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \sigma(x, t),$$

où $\sigma(x, t)$ est la source de chaleur et λ est le coefficient de diffusivité thermique.

- (a) Montrer qu'en absence de source de chaleur, c'est-à-dire $\sigma(x, t) = 0$, le profil de température est de la forme,

$$T(x, t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{4\pi\lambda(t-t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\lambda(t-t')}} ,$$

où σ_0 est une constante.

- (b) Déterminer le profil de température $T(x, t)$ généré en position x au temps t par une source de chaleur $\sigma(x', t')$ en tout point x' au temps $t' < t$. Pour ce faire, identifier premièrement la fonction de Green $G(x - x', t - t')$ définie par l'équation de Green scalaire,

$$\mathcal{L}G(x - x', t - t') = \delta(x - x') \delta(t - t') ,$$

pour une source de chaleur ponctuelle σ_0 située en position x' au temps t' et déterminer l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} . En déduire deuxièmement le profil de température général $T(x, t)$ par superposition.

- (c) Déterminer le profil de température $T(x, t)$ lorsqu'un laser éclaire ponctuellement le centre de la barre en $x' = 0$ au temps $t' = 0$. Dans ce cas, la source de chaleur ponctuelle s'écrit,

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 \delta(x) \delta(t) .$$